## 9.6 Anwendungen

$A^k = (UJU^{-1})^k = UJ^kU^{-1}$

**Potenzen:** Sei $U^{-1}AU = J = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_r)$ die Jordannormalform von $A$ als Blockdiagonalmatrix mit Jordanblöcken $J_1, \dots, J_r$. Dann sind die Potenzen von $A$ gleich

$$A^k = UJ^kU^{-1} = U \cdot \operatorname{diag}(J_1^k, \dots, J_r^k) \cdot U^{-1}.$$

Für jeden Jordanblock $J_j$ der Grösse $n_j$ zum Eigenwert $\lambda_j$ schreibe $J_j = \lambda_j \cdot I_{n_j} + N_{n_j}$ mit der $n_j \times n_j$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j I + N$$

$$N_{n_j} := \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Mit der binomischen Formel und mit $N_{n_j}^{\ell} = 0$ für alle $\ell \geqslant n_j$ folgt dann

$$\boxed{J_j^k} = (\lambda_j \cdot I_{n_j} + N_{n_j})^k = \boxed{\sum_{\ell=0}^{n_j-1} \binom{k}{\ell} \cdot \lambda_j^{k-\ell} \cdot N_{n_j}^{\ell}.}$$

Polynom vom Grad $\ell$ in $k-\ell$

$\wedge$

$n_j$

$K^n$

**Rekursionsgleichungen:** Eine vektorwertige Rekursionsgleichung $v_{k+1} = Av_k$ mit Anfangswert $v_0$ besitzt die eindeutige Lösung $v_k = A^k v_0$ für alle $k \geqslant 0$.

Eine skalarwertige Rekursionsgleichung $x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \ldots + a_0 x_k$ vom Grad $n$ übersetzt man in die vektorwertige Rekursionsgleichung $v_{k+1} = Av_k$ vom Grad 1 mit

$$v_k := \begin{pmatrix} x_{k+n-1} \\ \vdots \\ x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rightsquigarrow A v_k = A \begin{pmatrix} x_{k+n-1} \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+n} \\ x_{k+n-1} \\ \vdots \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = v_{k+1}$$

Hier ist $A^T$ die Begleitmatrix des Polynoms $f(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_0$, hat also dieses Polynom als Minimal- und charakteristisches Polynom; daher hat $A$ genau einen Jordanblock zu jedem irreduziblen Faktor von $f$. Ist also $f(X) = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{n_j}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in K$, so hat $A$ die Jordannormalform $U^{-1}AU = J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_r)$ mit je einem Jordanblock $J_j$ der Grösse $n_j$ zum Eigenwert $\lambda_j$. Somit ist jeder Eintrag von $v_k = U \cdot \operatorname{diag}(J_1^k, \ldots, J_r^k) \cdot U^{-1} v_0$ eine Linearkombination von $\binom{k}{\ell}\lambda_j^{k-\ell}$ für $1 \leqslant j \leqslant r$ und $0 \leqslant \ell < n_j$. Daraus folgt

$$\boxed{x_k = \sum_{j=1}^{r} \sum_{\ell=0}^{n_j-1} c_{j,\ell} \cdot k^\ell \cdot \lambda_j^k}$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_{j,\ell} \in K$. Umgekehrt ist jede so definierte Folge eine Lösung der Rekursionsgleichung.

$\sum_{j=1}^{r} n_j = n$ Koeffizienten.

**Bsp.:** $a_{k+3} = 3a_{k+2} - 3a_{k+1} + a_k$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat Char. Pol } = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3.$$

$$\Rightarrow \text{JNF} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: J \quad \Rightarrow \quad J^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ & 1 & k \\ & & 1 \end{pmatrix} = I + k \cdot * + k^2 *$$

konstant.

$$v_k = \underbrace{U}_{\text{unabh. von } k} \cdot J^k \cdot \underbrace{U^{-1} \cdot v_0}_{\text{unabh. von } k} = 1 \cdot * + k \cdot * + k^2 \cdot *$$

unabh. von $k$.

$$\Rightarrow a_k = c_0 + c_1 k + c_2 k^2$$

für Konstanten $c_0, c_1, c_2$.